ความลับของดอกไม้ฟิโบนักชี

Plants can no more avoid Fibonacci numbers than salt crystals can avoid being cubical.
-- Ian Stewart

มนุษย์รู้จักจำนวนนับมาแต่เกิด 1, 2, 3, 4, 5, … จุดสามจุดเป็นเหมือนสัญลักษณ์บอกว่าหลังจาก 5 ต่อไปก็ยังมีจำนวนอื่นอีก เรียงลำดับกันไปเรื่อย ๆ อย่างมีกฎมีเกณฑ์ ลำดับของจำนวนนับมีกฎว่า จำนวนถัดไปมากกว่าจำนวนก่อนหน้าอยู่ 1 เสมอ ในทางคณิตศาสตร์ เขียนย่อให้กระชับจับใจขึ้นได้ดังนี้ $a_1 = 1$, $a_2 = a_1+1$, $a_3 = a_2+1$, $a_4 = a_3+1$, … ซึ่งแตกต่างจากการเขียนในแบบธรรมดา $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, $a_4 = 4$, … โปรดสังเกต

ถ้าอยากรู้ว่าในโลกนี้มีลำดับจำนวนที่มีกฎเกณฑ์แบบอื่น ๆ อย่างไรบ้าง ต้องคลิกไปที่เว็บ The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences (www.research.att.com/~njas/sequences/) ณ ที่นี้ ผู้อ่านสามารถตรวจสอบได้ว่าลำดับที่ผู้อ่านคิดค้นโดยตั้งกฎเกณฑ์ขึ้นมาเองนั้น มีผู้ใดเคยคิดไว้แล้วหรือยัง ถ้ายังไม่มี ผู้อ่านสามารถขอเพิ่มเติมและจารึกชื่อไว้กับลำดับใหม่นั้นด้วย แต่อาจจะยากอยู่สักหน่อยนะ เพราะขนาดผู้เขียนลองกดคีย์บอร์ดมั่ว ๆ ลงไป 1,3,5,2,7,8 เว็บไซต์นี้ยังรายงานบอกกลับมาว่า Displaying 1-2 of 2 results found. แปลว่าคิดว่ามั่วแล้วก็ยังมีอยู่สองลำดับที่สอดคล้อง มหัศจรรย์ ลองเล่นดูนะ

ลำดับฟิโบนักชี

ลำดับที่มีชื่อเสียงในอันดับต้น ๆ คงไม่พ้น ต้องเป็นลำดับฟิโบนักชี (Fibonacci sequence) ซึ่งนิยามดังนี้ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ และกำหนดค่าเริ่มต้น $F_0=0$, $F_1=1$ ซึ่งนิยามเพียงเท่านี้ทำให้เกิด

$F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

สมาชิกของลำดับดับฟิโบนักชี 30 ตัวแรก เรียงตามนี้ 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, …

จะว่าไปแล้ว ลำดับฟิโบนักชีถือกำเนิดมานานแล้ว เมื่อไรไม่รู้ มีหลักฐานว่าเป็นที่รู้จักกันในเอเชียของเรานี่เองเสียด้วย ในการศึกษาด้านการประพันธ์ยุคอินเดียโบราณเมื่อสองพันกว่าปีมาแล้ว รูปแบบจำนวนคำ n พยางค์ที่สร้างได้จากคำ 1 และ 2 พยางค์เป็นจำนวนฟิโบนักชี ส่วนในโลกตะวันตก มีการกล่าวถึงลำดับฟิโบนักชีในหนังสือ Liber Abaci ที่เขียนในปี ค.ศ. 1202 ซึ่งผู้ที่เขียนมันขึ้นก็มิใช่ใคร เขาคือ Leonardo of Pisa หรือในชื่อ Fibonacci นั่นเอง

มีคำถามน่าสนใจมากมายเกี่ยวกับลำดับฟิโบนักชี และเช่นเดียวกันก็มีคำตอบที่น่าสนใจมากมายด้วย เช่น ถ้า $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ แล้ว F_{1000} คือจำนวนใด หากไม่คิดอะไรมากก็ค่อย ๆ บวกไปเรื่อย ๆ สักอาทิตย์ก็จะได้ F_{998} และ F_{999} ซึ่งเมื่อนำมาบวกกันก็จะเป็น F_{1000} ตามความสำพันธ์ $F_{1000} = F_{999} + F_{998}$ ผู้อ่านอาจจะหวังว่าถ้ามีสูตรสำเร็จสำหรับหา F_{1000} ได้โดยไม่ต้องคำนวณ F_{998} และ F_{999} ก็คงดี และก็มีจริง ๆ ด้วย นักคณิตศาสตร์คิดสูตรสำเร็จขึ้นมาในชื่อสูตรของ Binet ดังนี้

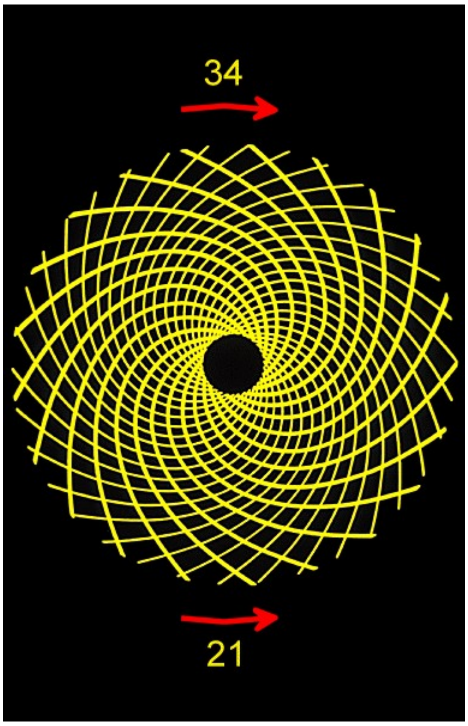
$$F_n = \frac{\varphi^n - (1-\varphi)^n}{\sqrt{5}} = \frac{\varphi^n - (-1/\varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

โดยที่ $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\ldots$ จะสนุกมากเลยหากผู้อ่านจะลองคำนวณหา F3, F4, F5 โดยใช้สูตรของ Binet ลองให้รู้ว่ามันจริง

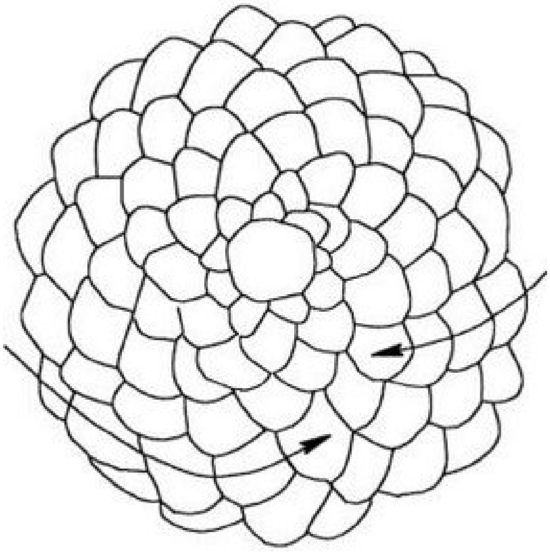
φ มีชื่อเรียกอันเลอค่าว่า สัดส่วนทองคำ ลองคำนวณ $\frac{F(n+1)}{F(n)},$ สำหรับค่า n ต่าง ๆ กันดูเถิด เช่น 34/21, 89/55, 233/144, 610/377, 1597/987, … ผู้อ่านน่าจะได้ข้อความคาดการณ์ว่า เมื่อ n มากขึ้น ค่าของ Fn+1/Fn จะป้วนเปี้ยนอยู่แถว ๆ ค่าของ ø เขียนเป็นคณิตศาสตร์ให้สวยก็ว่า $\lim_{n\to\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} = \varphi$, เจ้า φ นี่เองที่เกี่ยวพันกับเรื่องพิศวงต่าง ๆ ที่พบในธรรมชาติอีกตั้งมากมาย

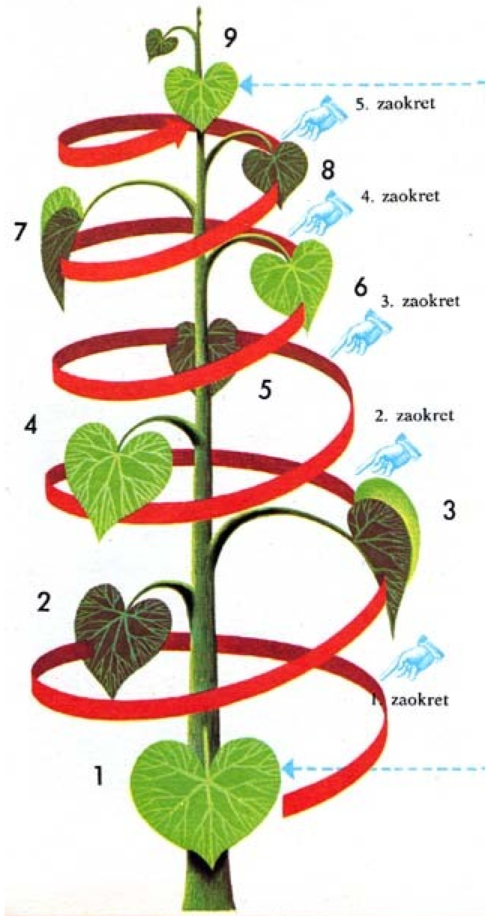
ลำดับฟิโบนักชีกับธรรมชาติ

ผู้เขียนเคยตกหลุมรักลำดับฟิโบนักชีเมื่อตอนเป็นเด็ก ตอนนี้ก็ยังรักอยู่มิคลาย ผู้เขียนอ่านเจอในหนังสือว่า ดอกไม้ตระกูลทานตะวันแอบซุกซ่อนลำดับฟิโบนักชีไว้ ให้สังเกตดอกเล็ก ๆ (florets) ซึ่งจะกลายร่างเป็นเมล็ดที่อยู่ตรงกลางของดอกทานตะวัน การเรียงตัวของเมล็ดดูเป็นระเบียบเรียบร้อย มองเห็นส่วนโค้งเว้าไปทางขวาหมุนตามเข็มนาฬิกา อีกโค้งหนึ่งเวียนวนในทิศตรงกันข้าม หมุนทวนเข็มนาฬิกา ดู ๆ ไป ก็เพลินดี และเมื่อนับจำนวนเกลียววนแต่ละทางจะพบลำดับฟิโบนักชีปรากฏขึ้นอย่างน่าประหลาดใจ จำนวนโค้งเป็นสมาชิกของลำดับฟิโบนักชี และเป็นสมาชิกที่ติดกันด้วย เช่น 21 กับ 34 ดังรูป



ไม่เพียงแต่ทานตะวันเท่านั้นนะ ในพืชชนิดอื่น ๆ ก็พบปรากฏการณ์คล้าย ๆ กันนี้เกิดขึ้นเป็นปกติเช่นกัน ทั้งในลายเกลียววนบนเปลือกลูกสับปะรด ลูกสน และการจัดเรียงตัวของใบไม้รอบลำต้นในสารพัดพืช





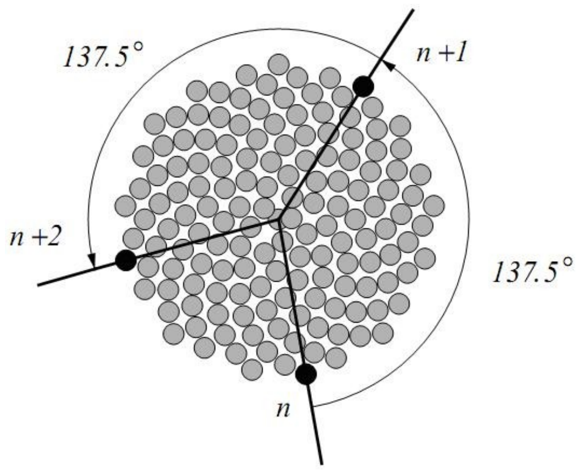
ทำไม ฟิโบนักชี ทำไม

ปรากฏการณ์พิเศษดังกล่าว มีคำอธิบายที่พอจะฟังสมเหตุสมผลบ้างไหม คำถามนี้เกิดขึ้นนานแล้ว ผู้เชี่ยวชาญวิทยาศาสตร์กายภาพ นักคณิตศาสตร์ก็ด้วย และโดยเฉพาะนักพืชวิทยาในสาขาการจัดเรียงใบ (phyllotaxis หรือ phyllotaxy ในภาษากรีก phyllo แปลว่า leaf และ taxis แปลว่า motion/orientation) ที่รับผิดชอบศึกษาเรื่องรูปแบบทางเรขาคณิตและรูปแบบทางจำนวนของการเรียงใบของต้นพืช ต่างให้ความสนใจที่จะไขความลับของเรื่องนี้ให้กระจ่าง

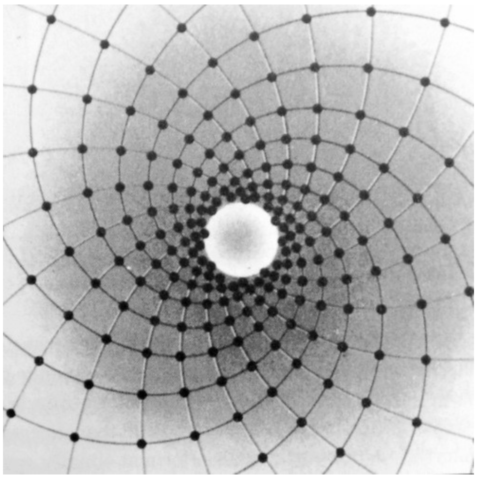
งานศึกษาวิจัยที่เป็นพื้นฐานเพื่อนำไปสู่การไขความลับเรื่องดอกไม้ฟิโบนักชีริเริ่มโดยนักคณิตศาสตร์ชื่อ Charles Bonnet และ G. L. Calandrini พวกเขาสนใจศึกษาเรื่องเกลียววนของลูกสนตั้งแต่ช่วงกลางศตวรรษที่ 18 (ตอนนี้ ศตวรรษที่ 21 แล้ว) งานที่สุดสำคัญในช่วงแรกเกิดขึ้นในปี ค.ศ. 1837 นักผลึกวิทยา Auguste Bravais และ Louis Bravais สองพี่น้อง ได้ตั้งทฤษฎีสำคัญเรื่องมุมทองคำที่ดูเหมือนว่าพืชต่าง ๆ จะชอบกางขนาดเท่านี้ (รอก่อน จะเล่าให้ฟังต่อไป) ปี ค.ศ. 1872 นักคณิตศาสตร์ชาวสก็อต Peter Guthrie Tait ใช้ความรู้เรขาคณิตแลตทิซ (lattice geometry) แสดงให้เห็นว่า ตาของมนุษย์สังเกตเห็นเกลียวสองเกลียวในทิศทางสวนกัน ถ้ามีหนึ่งหนึ่งเกลียว ก็จะเห็นเกลียวที่สองด้วย เป็นเรื่องปกติ งานศึกษาในอดีตข้างต้นที่กล่าวถึงนี้ ให้คำตอบเป็นคำอธิบายพื้นฐานเกี่ยวกับเรขาคณิตของการจัดเรียง ยังไม่ได้ให้เหตุผลว่าลำดับฟิโบนักชีเกี่ยวข้องกับการเติบโตของพืชอย่างไร

งานศึกษาด้านการจัดเรียงใบ ในยุคต่อมามีความลุ่มลึกมากขึ้น ผลงานสำคัญของนักสัตววิทยา D'Arcy Wentworth Thomson ในหนังสือสุดคลาสสิคชื่อ On Growth and Form ในปี ค.ศ. 1942 ได้ตีกระกาศข้อความสำคัญให้โด่งดังยิ่งขึ้นว่าต้นพืชชอบพอกับลำดับฟิโบนักชีและเกลียววนแบบฟิโบนักชีเสียจริง เพื่อค้นหาคำอธิบายที่มากกว่าคำอธิบายเชิงตัวเลข เราต้องมองลึกลงไปถึงแบบแผนวิธีที่ทำให้พืชเติบโตแบบที่เกิดขึ้นด้วย โดยมุ่งเล็งไปที่เหตุผลเชิงรูปทรงและเรขาคณิต

การเติบโตเริ่มจากศูนย์กลางของดอก เซลก้อนแรกกำเนิดและเติบโตเต่งตึงขยายใหญ่ขึ้นตามเวลา เซลก้อนต่อมากำเนิดและผลักดันให้เซลก้อนแรก ๆ ซึ่งผลิก่อนต้องหาตำแหน่งที่อยู่ใหม่ที่ฉีกรัศมีห่างจากใจกลางของดอกออกไป ก้อนเซลเก่าและใหม่ เล็กและใหญ่ดันเบียดเสียดเยียดยัดชิดติดกันอย่างเป็นระเบียบ มีระบบ ลงตัวและพอดี สายตาของมนุษย์มองเห็นความสวยงามของเส้นสายเกลียวโค้งเป็นสองแนว



สองพี่น้องตระกูล Bravais ค้นพบสูตรการเจริญเติบโตของก้อนเซลที่กล่าวถึง พวกเขาวัดมุมกางของก้อนเซลที่เกิดใหม่กับที่เกิดก่อน อ่อนกับแก่ โดยอิงเทียบกับจุดศูนย์กลางของดอก และพบว่าขนาดของมุมกางค่อนข้างคงที่ประมาณ 137.5 องศา ตัวเลข 137.5 เกี่ยวอะไรกับลำดับฟิโบนักชี $\frac{F(n+1)}{F(n)} \times 360 = 222.5$ และหากพิจารณาที่มุมแหลม ก็มองที่ 360 องศา – 222.5 องศา = 137.5 องศา ขนาดมุมพิเศษนี้มีชื่อเรียกโก้เก๋ว่า มุมทองคำ (golden angle) ซึ่งค่าเป๊ะ ๆ ของมุมทองคำนั้นคือ 137.50776 องศา พี่น้อง Bravais พบว่ามุมทองคำนี้ช่างเป็นที่นิยมในหมู่พฤกษานัก เพราะสามารถสังเกตพบเห็นได้ทั่วไปเสียเหลือเกิน

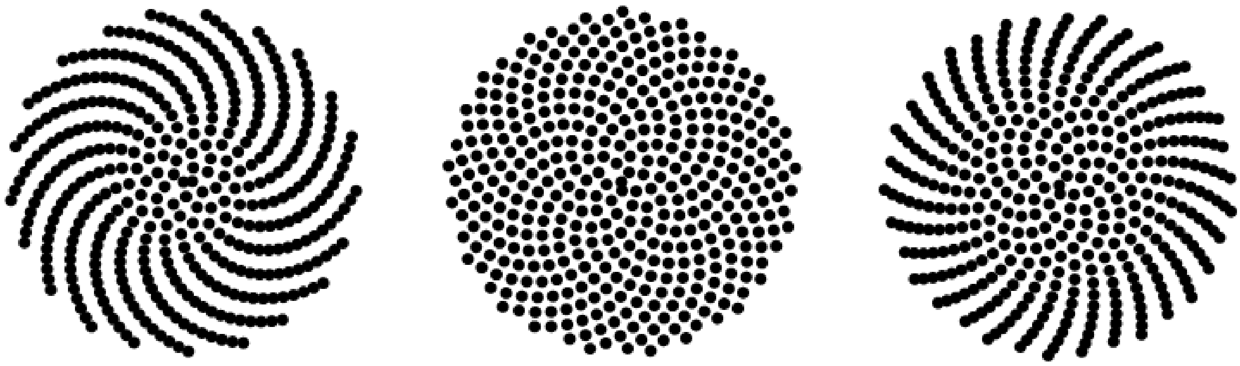


ในปี ค.ศ. 1907 G. Van Iterson ลองลงจุดสร้างภาพเมื่อใช้มุมทองคำ 137.5 องศา แล้วก็ได้ภาพอย่างที่คิดไว้ เกลียววนซ้ายและขวาปรากฏให้เห็นด้วยสายตาเปล่าอย่างชัดเจน

อีกหลายสิบปีต่อมา ค.ศ. 1979 H. Vogel ลองลงจุดด้วยสมการ

$$\phi = n * 137.5^\circ, \qquad r = c\sqrt{n}$$

เมื่อ n เป็นลำดับที่ของจุด, r เป็นรัศมีที่แต่ละจุดอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง และ c เป็นค่าคงที่ที่เหมาะสม เมื่อเปรียบเทียบภาพที่สร้างได้จากการลองให้มุมกางไม่ถึง 137.5° มุมกางเท่ากับ 137.5° และมุมกางมากกว่า 137.5° ปรากฏผลดังภาพ



ϕ = **137.3 องศา** ϕ = **137.5 องศา** ϕ = **137.6 องศา**

จากภาพทั้งสาม แสดงให้เห็นว่ามุมทองคำ 137.5 องศา เป็นเพียงมุมเดียวที่ก้อนเซล (ซึ่งกลายร่างเป็นดอกเล็ก ๆ และเป็นเมล็ดในเวลาต่อมา) จัดเรียงตัวกันอย่างแนบสนิทแน่นดี ไม่มีช่องเว้นว่างให้เสียพื้นที่ สองเกลียวสวยงามเด่นชัดให้เห็น ซึ่งตีความได้ว่า การจัดเรียงตัวของเมล็ดที่ตรงใจกลางดอกทานตะวันมีประสิทธิภาพสูงสุดหรือเจ๋งที่สุด (most efficient packing) เมื่อจัดเรียงตัวแบบที่เป็นอยู่ ประสิทธิภาพหรือความเจ๋งในที่นี่บ่งบอกถึง ความแข็งแรงแน่นหนาของพืชนั่นเอง คำอธิบายของ Vogel นี้เองทำให้ทุกคนพอใจหายสงสัยเป็นเบื้องต้น จนถึงปี ค.ศ. 1992 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสสองคน Yves Couder และ Adrian Douady ได้ศึกษาเพิ่มเติมและให้คำอธิบายลึกซึ้งจนเป็นที่ยอมรับกันทั่วไป การพัฒนาเติบโตของเซลพืชมีกลไกที่บังเอิญไปสอดคล้องกับการเติบโตของลำดับฟิโบนักชีโดยไม่ได้ตั้งใจ การเจริญเติบโตของพืชแบบฟิโบนักชี มันเป็นแบบนี้ก็เพื่อประโยชน์สูงสุดต่อพืชเอง ความลับของดอกไม้ฟิโบนักชีได้ถูกไขกระจ่างลงแล้ว

สรุปปิดท้าย แม้ความลับของดอกไม้ฟิโบนักชีจะเผยออกแล้ว แต่ลำดับฟิโบนักชียังคงเป็นที่นิยมในหมู่นักวิชาการอยู่ไม่สร่างซา ในปัจจุบันมีการประยุกต์และใช้ลำดับฟิโบนักชีในหลากหลายสาขาวิชา โดยเฉพาะการประยุกต์ในวิทยาการคอมพิวเตอร์ มีชื่อของฟิโบนักชีในการเรียกชื่ออัลกอริทึม โครงสร้างข้อมูล การสุ่ม การคำนวณเชิงขนาน การหาค่าเหมาะที่สุด หรือกระทั่งวิธีการ

การบีบอัดข้อมูลเสียง ที่น่าสนใจคือการประยุกต์ใช้ฟิโบนักชีในวงการตลาดหุ้นและการเงินด้วย ป่านนี้ ท่านฟิโบนักชีบนสวรรค์คงกำลังแอบอมยิ้มอยู่คนเดียว.

เอกสารอ้างอิง

Przemyslaw Prusinkiewicz and Aristid Lindenmayer. **The Algorithmic Beauty of Plants.** Springer-Verlag, New York . (1990).

Ian Stewart. **Nature's Numbers.** Weidenfeld & Nicolson, London. (1995).

Ian Stewart. **Life's Other Secret.** John Wiley & Sons, New York. (1997).

http://en.wikipedia.org/wiki/Fibonacci_number

เรียบเรียงโดย

สุรัชน์ อินทสังข์

surat.intasang@gmail.com